7.2 Matrisler

Lineer denklem sisteminin incelenmesinde önemli yapı taşı matris teorisidir. Şimdi matrisler hakkında bize gerekecek temel bilgileri verelim.

Matrisler A, B, C veya $\Phi, \Psi, \dots$ harfleri ile gösterilirler. Bir A <u>matrisi</u> dikdörtgensel sıralanmış sayıları içerir, veya m satır ve n sütunda sıralanmış elemanlardır ve

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ile gösterilirler. A matrisine $m \times n$ tipinde matris denir. (m satıra n sütuna sahip matris). Matrisin elemanları reel veya kompleks sayılar olarak alınacak. i. satır, j. sütunda bulunan elemanı a_{ij} ile gösterilir. A matrisini kısaca $A=(a_{ij})$ notasyonu ile de gösterebiliriz.

Bir $A=(a_{ij})$ matrisinin satır ve sütunlarını değiştirerek elde ettiğimiz yeni matrise A'nın <u>transposesi</u> denir ve A^T ile gösterilir. Yani $A^T=(a_{ji})$ dir. Bir $c=a+ib$ komplek sayının eşleniğini $\bar{c}=a-ib$ ile gösterirsek, bir $A=(a_{ij})$ matrisinin <u>eşleniği</u> her a_{ij} elemanının eşleniği $\bar{a}_{ij}$ alınılarak elde edilen matristir ve $\bar{A}$ ile gösterilir. Bir matrisin eşleniğinin transposesine A'nın <u>eki</u> denir ve A^* ile gösterilir. Buna göre $A^*=\bar{A}^T$ dir.

Örnek: $A=\begin{pmatrix} i & 1+i \\ 3 & -4+2i \\ -1-2i & -5 \end{pmatrix}$ ise $A^T=?$, $\bar{A}=?$, $A^*=?$

$$A^T=\begin{pmatrix} i & 3 & -1-2i \\ 1+i & -4+2i & -5 \end{pmatrix}, \quad \bar{A}=\begin{pmatrix} -i & 1-i \\ 3 & -4-2i \\ -1+2i & -5 \end{pmatrix}, \quad A^*=\begin{pmatrix} -i & 3 & -1+2i \\ 1-i & -4-2i & -5 \end{pmatrix}$$

Biz özellikle iki çeşit matris tipi ile ilgileneceğiz birincisi satır ve sütun sayısı aynı olan <u>kare</u> matris, yani $m=n$, ikincisi yalnız bir sütun içeren matrisler ki biz buna <u>vektör</u> diyeceğiz, yani $n \times 1$ tipinde matrisler. Vektörleri $x, y, s, \eta, \dots$ ile göstereceğiz. $n \times 1$ tipindeki bir x vektörünün transposesi x^T $1 \times n$ tipindeki yalnız satır içeren bir vektördür.

Özellikler

1) Eşitlik. $m \times n$ tipindeki A ve B matrisinin, her i ve j için a_{ij} ve b_{ij} elemanları eşit ise A ve B'ye <u>eşit</u> matris denir. Yani
$A=B \iff a_{ij}=b_{ij}, \ \forall i,j$

2) Sıfır. Bütün elemanları sıfır olan matrise <u>sıfır</u> matrisi denir ve 0 ile gösterilir.

3) Toplama. $m \times n$ tipindeki iki $A=(a_{ij})$ ve $B=(b_{ij})$ matrisinin <u>toplamı</u> $A+B$ ile gösterilir ve
$$A+B = (a_{ij})+(b_{ij}) = (a_{ij}+b_{ij}) \quad \forall i,j$$
ile tanımlanır. Toplam, değişme ve birleşme özelliğine sahiptir.
$$A+B=B+A, \quad A+(B+C)=(A+B)+C$$

4) Bir sayı ile çarpma. Bir A matrisini bir α kompleks sayısı ile çarpma αA ile gösterilir ve

$$\alpha A = \alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij})$$

ile tanımlanır. Dağılma kuralları

$$\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B \quad , \quad (\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$$

sağlanır. A'nın negatifi $-A$ ile gösterilir ve

$$-A = (-1)A$$

ile tanımlanır.

5) Çıkarma: $m \times n$ tipindeki A ve B matrislerinin farkı $A-B$ ile gösterilir ve

$$A - B = A + (-B)$$

ile tanımlanır. Yani $\quad (a_{ij}-b_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij})$ dir.

6) Çarpma: Bir $m \times n$ tipindeki A matrisi ile bir $n \times r$ tipindeki B matrisinin çarpımı AB ile gösterilir ve

$$A \cdot B = C \Leftrightarrow (a_{ij})(b_{ij}) = (c_{ij}) \Leftrightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad \begin{matrix} i = 1,2,\dots,m \\ j = 1,2,\dots,r \end{matrix}$$

ile tanımlanır. Yani C matrisinin i. satır j. sütundaki elemanı, A'nın i. satırındaki her elemanın, B'nin j. sütunundaki ilgili her elemanla çarpılıp toplanması ile elde edilir. Çarpma birleşme ve toplama üzerine dağılma özelliklerine sahiptir

$$(AB)C = A(BC)$$

$$A(B+C) = AB + AC$$

Değişme özelliğine sahip değildir. Yani her zaman $AB = BA$ değildir.

örnek: $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2\cdot1 + 0\cdot(-1) + 1(-2) & 2\cdot2 + 0\cdot0 + 1\cdot1 & 2\cdot(-1) + 0\cdot1 + 1\cdot2 \\ 0\cdot1 + (-1)\cdot(-1) + 1\cdot(-2) & 0\cdot2 + (-1)\cdot0 + 1\cdot1 & 0\cdot(-1) + (-1)\cdot1 + 1\cdot2 \\ 1\cdot1 + 2\cdot(-1) + 1\cdot(-2) & 1\cdot2 + 2\cdot0 + 1\cdot1 & 1\cdot(-1) + 2\cdot1 + 1\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & +3 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1\cdot2 + 2\cdot0 + (-1)\cdot1 & 1\cdot0 + 2\cdot(-1) + (-1)2 & 1\cdot1 + 2\cdot1 + (-1)1 \\ (-1)\cdot2 + 0\cdot0 + 1\cdot1 & (-1)\cdot0 + 0\cdot(-1) + 1\cdot2 & (-1)\cdot1 + 0\cdot1 + 1\cdot1 \\ (-2)\cdot2 + 1\cdot0 + 2\cdot1 & (-2)\cdot0 + 1\cdot(-1) + 2\cdot2 & (-2)\cdot1 + 1\cdot1 + 2\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB \neq BA$$

7. Vektörlerin çarpımı. Matris çarpımının bir özel hali $1 \times n$, $n \times 1$ tipindeki vektör çarpımlarıdır. x^T ve y'nin vektör çarpımı

$$x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

dir. İki vektörün çarpımı bir kompleks sayıdır ve

$$x^T y = y^T x \quad , \quad x^T(y+z) = x^T y + x^T z \quad , \quad (\alpha x)^T y = \alpha(x^T y) = x^T(\alpha y)$$

özellikleri sağlanır.

Diğer bir kullanışlı vektör çarpımı tipi <u>skaler</u> veya <u>iç çarpım</u>dır. x ve y vektörlerinin iç çarpımı (x,y) ile gösterilir ve

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i = x^T \bar{y}$$

ile tanımlanır. Ayrıca

$$(x,y) = \overline{(y,x)} \quad , \quad (x, y+z) = (x,y) + (x,z) \quad , \quad (\alpha x, y) = \alpha(x,y) \quad , \quad (x, \alpha y) = \bar{\alpha}(x,y)$$

özellikleri sağlanır.

x vektörünün kendisi ile iç çarpımı daima negatif olmayan bir sayıdır.

$$(x,x)=\sum_{i=1}^{n} x_i\bar{x}_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$$

$\sqrt{(x,x)}$, genellikle $\|x\|$ ile gösterilir ve x'in <u>uzunluğu</u> veya <u>büyüklüğü</u> denir. $(x,y)=0$ ise x ve y'ye <u>diktir</u> denir.

Diğer taraftan matris çarpımı olarak x'in kendisi ile vektör çarpımı reel sayı olmayabilir.

$$x^Tx=\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Örnek: $x=\begin{pmatrix}2\\3i\\1-i\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}-1+i\\2\\3-i\end{pmatrix}$

$$x^Ty = 2(-1+i)+3i\cdot 2+(1-i)(3-i) = 4i$$
$$(x,y) = 2(-1-i)+3i\cdot 2+(1-i)(3+i) = 2+2i$$
$$x^Tx = 2^2+(3i)^2+(1-i)^2 = -5-2i$$
$$(x,x) = 2.2+(3i)(-3i)+(1-i)(1+i) = 15$$
$$\|x\| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{15}$$

8. Birim matris. Çarpıma göre <u>birim matris</u> I,

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

dır, ve A herhangi matris olmak üzere $AI=IA=A$ dır.

9. Bir matrisin tersi. I birim matris olmak üzere, verilen bir A kare matrisi için $AB=I$ şartını sağlayan B matrisi varsa B'ye A matrisinin <u>tersi</u> denir ve $A^{-1}=B$ ile gösterilir. $AA^{-1}=A^{-1}A=I$. Bir matrisin tersi varsa <u>singüler olmayan</u> matris, diğer durumda <u>singüler</u> (tekil) matris denir.

Bir A matrisinin tersi varsa, tersini bulmanın birkaç yolu vardır. Burada yalnızca iki yöntemi vereceğiz. Birinci yöntem determinant kullanılarak, ikinci yöntem elementer satır işlemleri ile kullanarak gösterilir.

1. Yöntem: Verilen bir kare matris A'nın her a_{ij} elemanına karşı M_{ij} ile gösterdiğimiz bir minör karşı gelir. M_{ij} <u>minörü</u>, A matrisinin i. satır ve j. sütununun silinmesi ile elde edilen matrisin determinantıdır. (Determinant için ayrıntılı bilgiyi Lineer Cebir ders notlarında bulabilirsiniz: http//www.mat.itu.edu.tr/ergezen/lineer/lineer.htm) Her a_{ij} elemanına karşı gelen c_{ij} <u>kofaktörü</u>

$$c_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

ile tanımlanır. Buna göre, eğer $B=A^{-1}$ ise $B=(b_{ij})$

$$b_{ij}=\frac{c_{ji}}{\det A}$$

dir. Bir matrisin tersinin olması için gerek ve yeter şart $\det A\neq 0$ olmasıdır. Ayrıca A matrisinin determinantını

$$\det A = a_{i1}c_{i1}+a_{i2}c_{i2}+\dots+a_{in}c_{in} \quad (i=1,2,\dots,n) \text{ (satıra göre)}$$

veya

$$\det A = a_{1j}c_{1j}+a_{2j}c_{2j}+\dots+a_{nj}c_{nj} \quad (j=1,2,\dots,n) \text{ (sütuna göre)}$$

ile de hesaplayabiliriz.

<u>Örnek:</u> $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ matrisinin varsa tersini bulunuz.

$$\det A = a_{11}c_{11}+a_{12}c_{12}+a_{13}c_{13}$$

$$c_{11}=(-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix}-1&1\\1&2\end{pmatrix} \qquad c_{12}=(-1)^{1+2}\det\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix} \qquad c_{13}=(-1)^{1+3}\det\begin{pmatrix}2&-1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$c_{21}=(-1)^{2+1}\det\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix} \qquad c_{22}=(-1)^{2+2}\det\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix} \qquad c_{23}=(-1)^{2+3}\det\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$c_{31}=(-1)^{3+1}\det\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix} \qquad c_{32}=(-1)^{3+2}\det\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix} \qquad c_{33}=(-1)^{3+3}\det\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix}$$

$c_{11}=-3$, $c_{12}=-3$, $c_{13}=3$, $c_{21}=-3$, $c_{22}=3$, $c_{23}=0$, $c_{31}=0$

$c_{32}=-3$, $c_{33}=-3$

$$\det A = a_{11}c_{11}+a_{12}c_{12}+a_{13}c_{13} = 1.(-3)+1.(-3)+(-1)3=-9\neq 0$$

olduğundan A'nın tersi vardır.

$$A^{-1}=\frac{c_{ji}}{\det A}=\frac{1}{-9}c_{ji}=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}c_{11}&c_{21}&c_{31}\\c_{12}&c_{22}&c_{32}\\c_{13}&c_{23}&c_{33}\end{pmatrix}=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-3&-3&0\\-3&3&-3\\3&0&-3\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1/3&1/3&0\\1/3&-1/3&1/3\\-1/3&0&1/3\end{pmatrix}$$

2. Yöntem: Elementer satır işlemleri ve sembolik gösterimleri aşağıdadır;

1. iki satırın yerini değiştirmek $\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}$ $\quad c_1 \Leftrightarrow c_3$

2. Bir satırı sıfırdan farklı bir sayı ile çarpmak $\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}\leftarrow a$ $\quad c_2 \to a c_2$

3. Herhangi bir satırı bir sayı ile çarpıp diğer satıra eklenmesini diğer satır yerine yazmak

$\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix} a$ $\quad c_2 \to a c_1 + c_2$

Bu elementer satır işlemleri ile herhangi bir A matrisini I birim matrisine dönüştürebilirsek, aynı işlemlerin I birim matrisine uygulanması ile de A'nın tersini elde ederiz. Bunun için A ve I birim matrisini $(A:I)$ şeklinde yazar ve A'yı birim matris oluncaya kadar elementer işlem uygularız. A birim matris olduğunda, I'nın değişimi A'nın tersidir. $(I:A^{-1})$.

<u>örnek:</u> $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz.

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&-1&1&0&0\\2&-1&1&0&1&0\\1&1&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[c_3\to -c_1+c_3]{c_2\to -2c_1+c_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&-1&1&0&0\\0&-3&3&-2&1&0\\0&0&3&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[c_2\to -\frac{1}{3}c_2]{c_3\to \frac{1}{3}c_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&-1&1&0&0\\0&1&-1&2/3&-1/3&0\\0&0&1&-1/3&0&1/3\end{array}\right)\xrightarrow[c_1\to c_3+c_1]{c_2\to c_3+c_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&2/3&0&1/3\\0&1&0&1/3&-1/3&1/3\\0&0&1&-1/3&0&1/3\end{array}\right)\xrightarrow{c_1\to -c_2+c_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1/3&1/3&0\\0&1&0&1/3&-1/3&1/3\\0&0&1&-1/3&0&1/3\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1/3&1/3&0\\1/3&-1/3&1/3\\-1/3&0&1/3\end{pmatrix}$$

Matris Fonksiyonları: Bazen vektör veya matrisin elemanlarını t reel değişkenli fonksiyonlar alabiliriz. Bu durumda

$$x(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{pmatrix}, \quad A(t)=\begin{pmatrix}a_{11}(t)&a_{12}(t)&\cdots&a_{1n}(t)\\a_{21}(t)&a_{22}(t)&\cdots&a_{2n}(t)\\\vdots&&&\\a_{n1}(t)&a_{n2}(t)&\cdots&a_{nn}(t)\end{pmatrix}$$

yazarız.

$A(t)$ matrisine, $t=t_0$ veya $\alpha<t<\beta$ aralığında, A'nın her elemanı o noktada veya aralıkta sürekli ise, sürekli denir. Benzer olarak A'nın her elemanı diferansiyellenebilir ise $A(t)$'ye diferansiyellenebilir denir ve $\frac{dA}{dt}$ ile gösterilen A'nın türevi

$$\frac{dA}{dt} = \left(\frac{da_{ij}}{dt} \right)$$

ile tanımlanır. Aynı yolla bir matris fonksiyonunun integrali

$$\int_a^b A(t)\,dt = \left(\int_a^b a_{ij}(t)\,dt \right)$$

olarak tanımlanır.

Calculüste olduğu gibi

$$\frac{d}{dt}(CA) = C\frac{dA}{dt} \quad , \quad C \text{ sabit bir matris}$$

$$\frac{d}{dt}(A+B) = \frac{dA}{dt} + \frac{dB}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(AB) = A\frac{dB}{dt} + \frac{dA}{dt}B$$

eşitlikleri geçerlidir.

Örnek: 1) $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}$ vektörünün $x' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} x$ dif. denklemini sağladığını gösteriniz.

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} 4e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} \qquad x' = \begin{pmatrix} 8e^{2t} \\ 4e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12e^{2t} - 4e^{2t} \\ 8e^{2t} - 4e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8e^{2t} \\ 4e^{2t} \end{pmatrix} \qquad x' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} x \text{ dir.}$$

2) $\psi(t) = \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{2t} \\ -4e^{-3t} & e^{2t} \end{pmatrix}$ nin $\psi' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \psi$ dif. denklemini sağladığını gösteriniz.

$$\psi'(t) = \begin{pmatrix} -3e^{-3t} & 2e^{2t} \\ 12e^{-3t} & 2e^{2t} \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\psi(t)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{2t} \\ -4e^{-3t} & e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-3t} - 4e^{-3t} & e^{2t} + e^{2t} \\ 4e^{-3t} + 8e^{-3t} & 4e^{2t} - 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3e^{-3t} & 2e^{2t} \\ 12e^{-3t} & 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\psi' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \psi$$

dir.